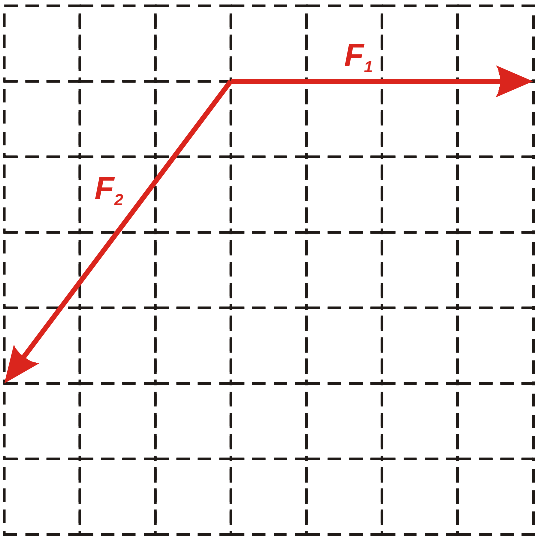
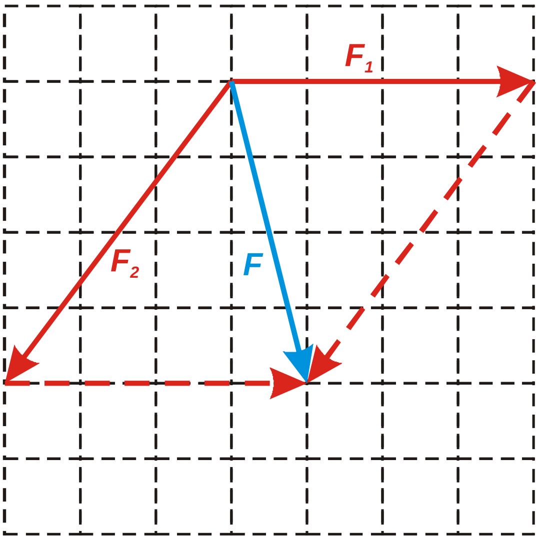
1.1.26 Vektory II

Předpoklady: 010125

Př. 1: Na obrázku jsou nakresleny síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$. Najdi jejich výslednici $\boldsymbol{F}$. Jaké jsou velikosti sil $\boldsymbol{F}_2$ a $\boldsymbol{F}$, jestliže platí $F_1 = 125\,\mathrm{N}$?





Jak zjistíme velikost sil $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}$?

Víme, že síla $\boldsymbol{F}_1$ má velikost 125 N a je nakreslena jako šipka o délce 4 cm $\Rightarrow$ změříme délky šipek, které znázorňují síly $\boldsymbol{F}_2$ a $\boldsymbol{F}$ a dopočteme pomocí přímé úměry.

Síla $\boldsymbol{F}_2$:

$\boldsymbol{F}_1$ 4 cm ... 125 N

$\boldsymbol{F}_2$ 5 cm ... x N

$$\frac{x}{5} = \frac{125}{4} \Rightarrow x = \frac{125}{4} \cdot 5 = 156\,\mathrm{N} \Rightarrow F_2 = 156\,\mathrm{N}$$

Síla $\boldsymbol{F}$:

$\boldsymbol{F}_1$ 4 cm ... 125 N

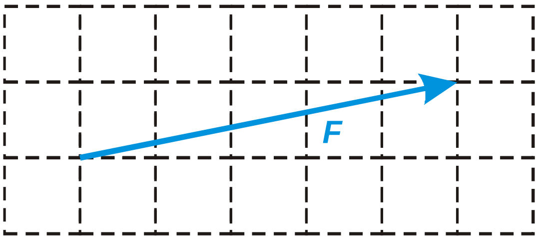
$\boldsymbol{F}$ 4,1 cm ... x N

$$\frac{x}{4,1}=\frac{125}{4} \Rightarrow x=\frac{125}{4}\cdot 4,1=128\,\text{N} \Rightarrow F=128\,\text{N}$$

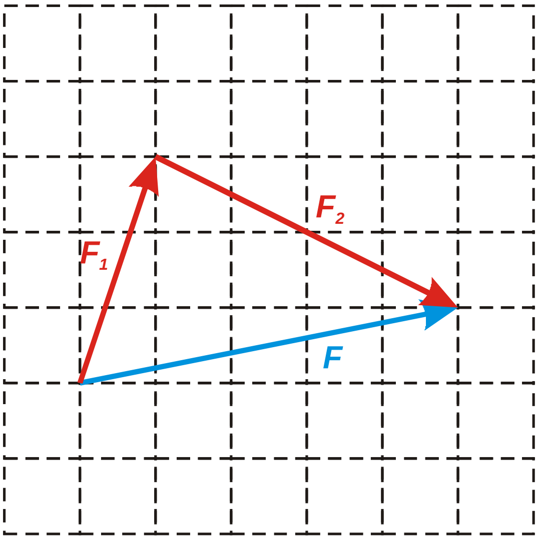
Pro velikosti sil platí $F_2=156\,\text{N}$ a $F=128\,\text{N}$.

Umíme už vektory sčítat, teď zkusíme opačnou operací – rozklad vektoru na složky.

Př. 2: Na obrázku je nakreslena síla $\boldsymbol{F}$. Nakresli do obrázku síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ tak, aby platilo $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$. Kolik má úloha řešení?

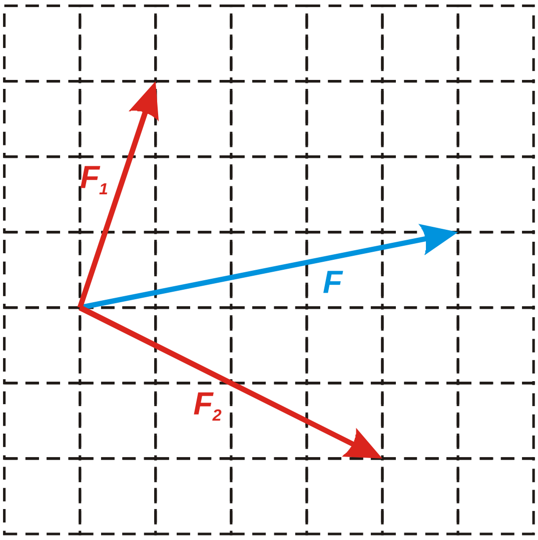


Stačí nakreslit sílu libovolnou sílu $\boldsymbol{F}_1$, která má se silou $\boldsymbol{F}$ stejný počáteční bod. Síla $\boldsymbol{F}_2$ bude spojovat konečné body sil $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}$.



Možných řešení je nekonečně mnoho.

Obrázek není zcela správný. Síla $\boldsymbol{F}_2$ by měla mít stejné působiště jako síly $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{F}_1$:



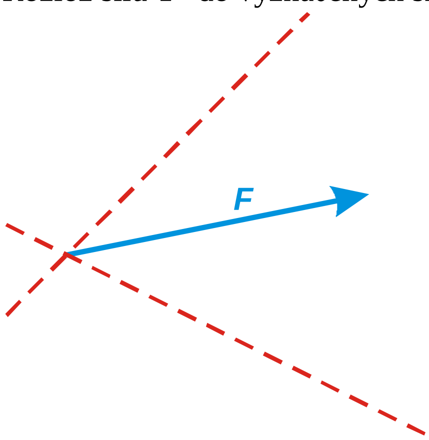
Říkáme, že jsme provedli rozklad síly $\boldsymbol{F}$ na její složky $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$.

Pokud chceme, aby řešení bylo jednoznačné, musíme dopředu přidat další informace:

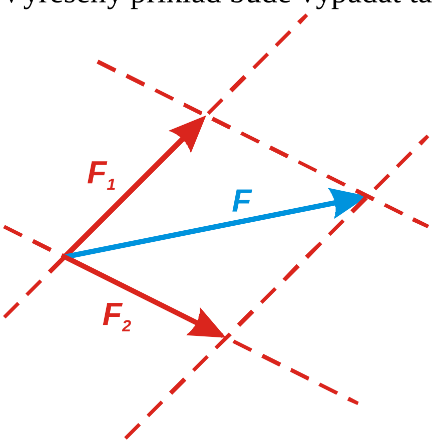
- určit směry sil, na které chceme sílu $\boldsymbol{F}$ rozložit,
- určit směr a velikost jedné ze sil,
- určit velikosti obou sil.

Zdaleka nejčastěji se ve fyzice síly rozkládají do předem určených směrů.

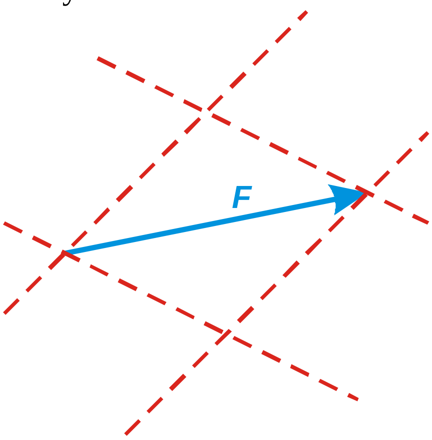
Př. 3: Rozlož sílu $\boldsymbol{F}$ do vyznačených směrů.



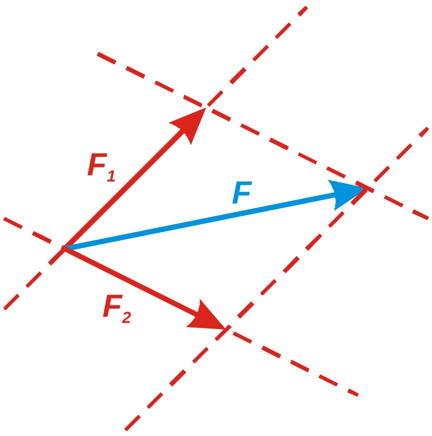
Vyřešený příklad bude vypadat takto:



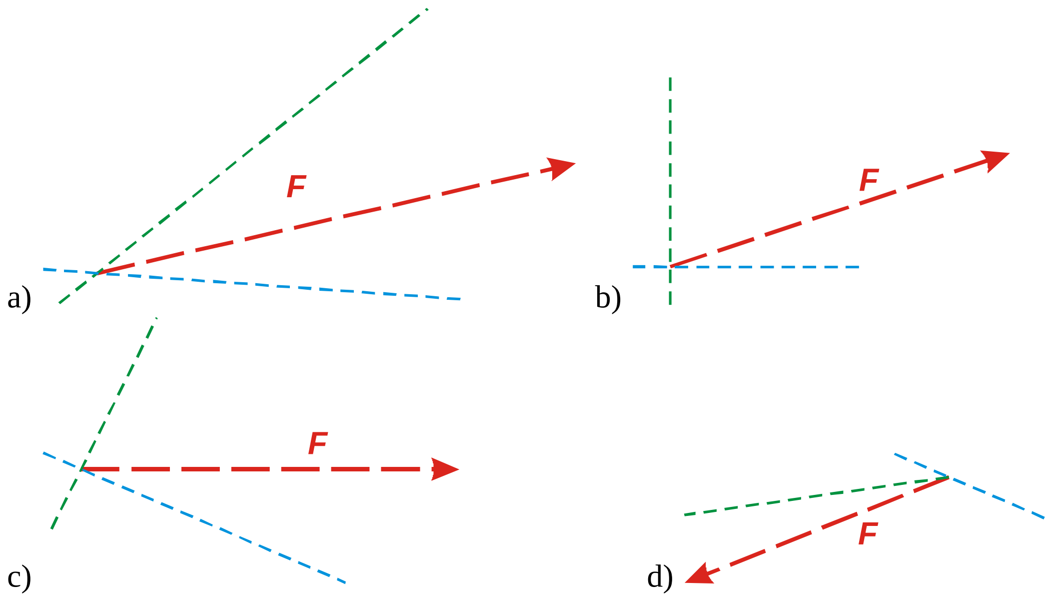
Budeme znát složky i výslednou sílu, doplněnou rovnoběžníkem sil. Při skládání sil jsme kresbu obrázku začínali u sil F_1 a F_2. Nyní musíme rovnoběžník nakreslit pomocí výsledné síly F a zadaných směrů $\Rightarrow$ nakreslíme z konečného bodu síly $\boldsymbol{F}$ rovnoběžky s vyznačenými směry a tím dokreslíme rovnoběžník.



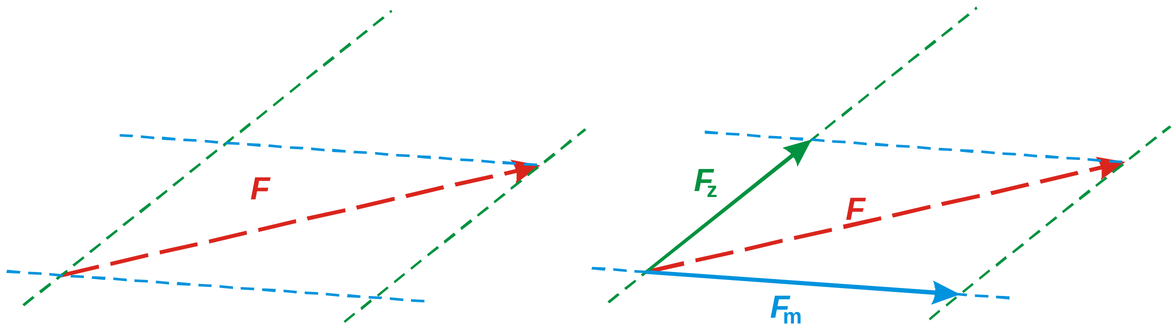
Nyní můžeme vytáhnout síly F_1 a F_2 (říkáme jim složky síly F).



Př. 4: Rozlož sílu $\boldsymbol{F}$ do naznačených směrů. Urči velikosti složek F_m a F_z ($1\,\text{cm} \simeq 1\,\text{N}$).

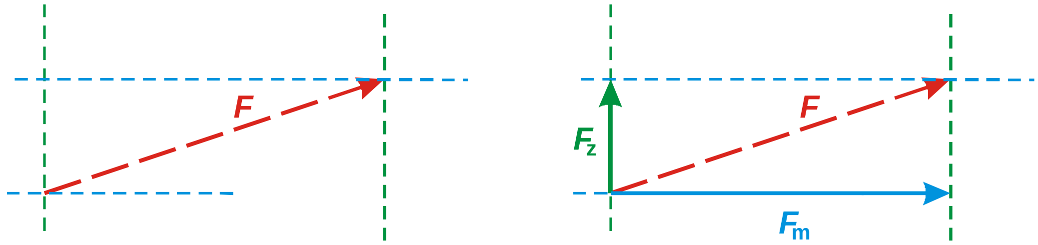


a)



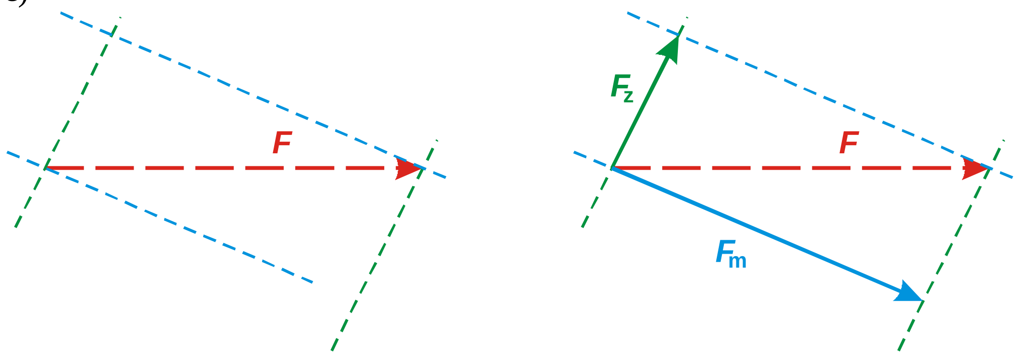
$F_m = 4{,}2\,\mathrm{N}$ $F_z = 2{,}8\,\mathrm{N}$

b)



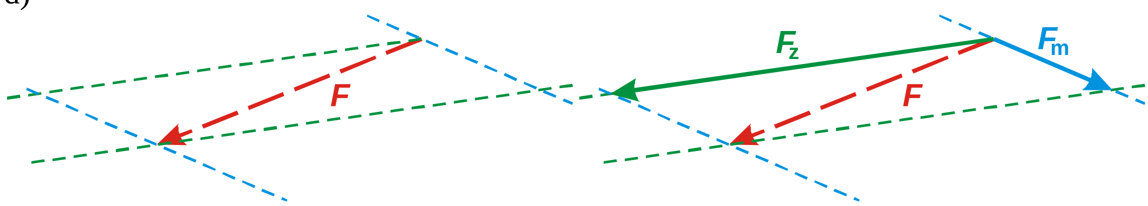
$F_m = 4{,}5\,\mathrm{N}$ $F_z = 1{,}5\,\mathrm{N}$

c)



$F_m = 4{,}5\,\mathrm{N}$ $F_z = 2\,\mathrm{N}$

d)

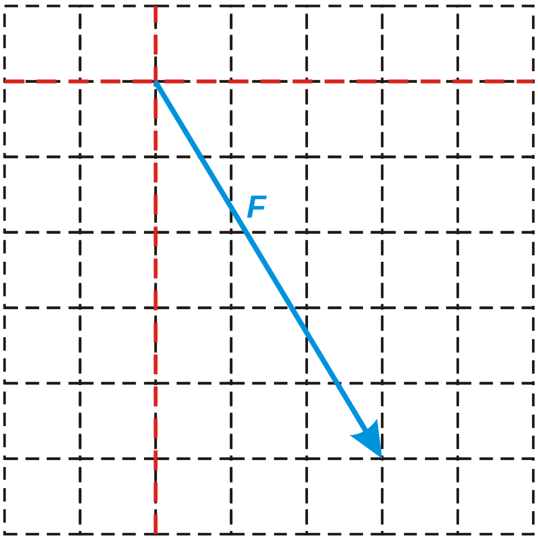


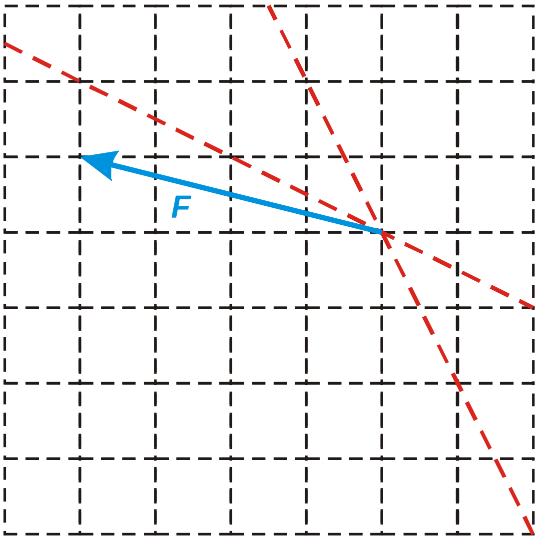
$F_m = 1{,}7\,\mathrm{N}$ $F_z = 5{,}1\,\mathrm{N}$

Pedagogická poznámka: Větší problém než kreslení rovnoběžek, představuje vytažení získaných složek. Zejména poslední bod je u slabších studentů nutné kontrolovat. Rovnoběžky sice nakreslí dobře, ale vytahují občas špatně.

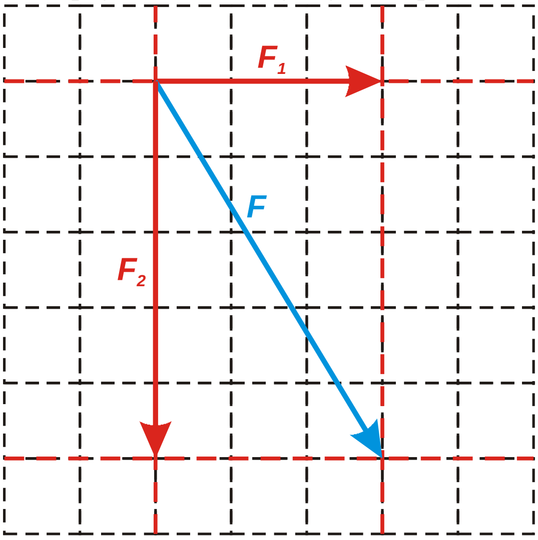
Pedagogická poznámka: Následující příklad je pro rychlejší žáky. Je třeba postupovat tak, aby na druhou část hodiny zbylo alespoň 25 minut.

Př. 5: Rozlož síly na obrázcích do vyznačených směrů. Urči velikosti získaných složek, jestliže v obou případech platí $F = 100\,\mathrm{N}$.





Postupujeme zcela stejně jako v předchozích případech:



Síla $\boldsymbol{F}_1$:

$\boldsymbol{F}$ 5,8 cm ... 100 N

$\boldsymbol{F}_1$ 3 cm ... x N

$$\frac{x}{3} = \frac{100}{5{,}8} \Rightarrow x = \frac{100}{5{,}8} \cdot 3 = 52\,\mathrm{N} \Rightarrow F_1 = 52\,\mathrm{N}$$

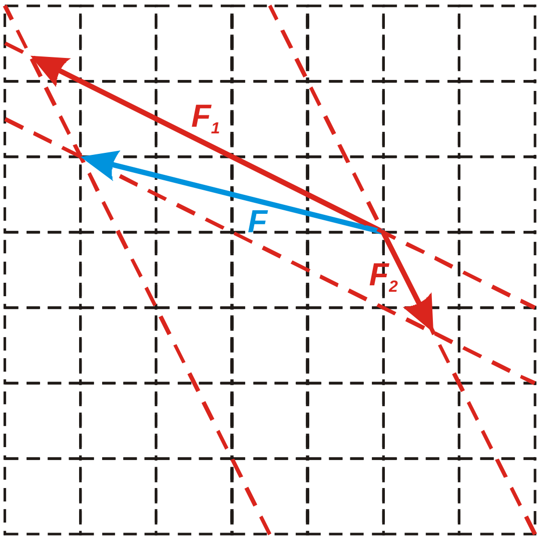
Síla $\boldsymbol{F}_2$:

$\boldsymbol{F}$ 5,8 cm ... 100 N

$\boldsymbol{F}_2$ 5 cm ... x N

$$\frac{x}{5} = \frac{100}{5{,}8} \Rightarrow x = \frac{100}{5{,}8} \cdot 5 = 86\,\mathrm{N} \Rightarrow F_2 = 86\,\mathrm{N}$$

Pro velikosti sil platí $F_1 = 52\,\mathrm{N}$ a $F_2 = 86\,\mathrm{N}$.



Síla $\boldsymbol{F}_1$:

$\boldsymbol{F}$ 4,1 cm ... 100 N

$\boldsymbol{F}_1$ 5,2 cm ... x N

$$\frac{x}{5{,}2} = \frac{100}{4{,}1} \Rightarrow x = \frac{100}{4{,}1} \cdot 5{,}2 = 127\,\mathrm{N} \Rightarrow$$

$F_1 = 127\,\mathrm{N}$

Síla $\boldsymbol{F}_2$:

$\boldsymbol{F}$ 4,1 cm ... 100 N

$\boldsymbol{F}_2$ 1,5 cm ... x N

$$\frac{x}{1{,}5} = \frac{100}{4{,}1} \Rightarrow x = \frac{100}{4{,}1} \cdot 1{,}5 = 37\,\mathrm{N} \Rightarrow F_2 = 37\,\mathrm{N}$$

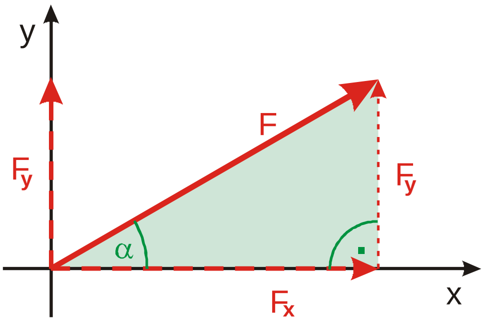
Pro velikosti sil platí $F_1 = 127\,\mathrm{N}$ a $F_2 = 37\,\mathrm{N}$.

Nejčastěji se vektory rozkládají do navzájem kolmých směrů. Souvisí to s tím, že kartézská soustava souřadnic má dvě navzájem kolmé osy a rozklad do těchto směrů lze pomocí goniometrických funkcí poměrně snadno provést i číselně.

Pedagogická poznámka: U následujících příkladů jste zcela odkázáni na matematiku. U tříd, ve kterých učím i matematiku, proberu goniometrické funkce na začátku roku i s využitím ve fyzice a látku prohlásím za červené rámečky (to, co si musí studenti pamatovat pořád). Ani po třech měsících nebývají zásadní problémy.

Př. 6: Síla o velikosti 30 N svírá s vodorovnou rovinou úhel 30°. Urči vodorovnou a svislou složku této síly.

Nakreslíme si obrázek.

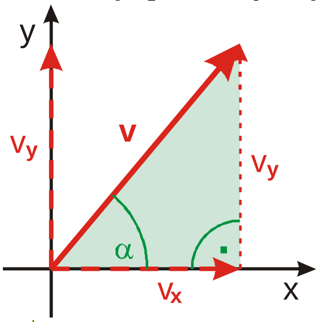


Hledané složky vektoru tvoří odvěsny pravoúhlého trojúhelníku:

- $\sin\alpha = \frac{F_y}{F} \Rightarrow F_y = F\cdot\sin\alpha = 30\cdot\sin 30^\circ\ \mathrm{N} = 15\ \mathrm{N}$
- $\cos\alpha = \frac{F_x}{F} \Rightarrow F_x = F\cdot\cos\alpha = 30\cdot\cos 30^\circ\ \mathrm{N} \doteq 26\ \mathrm{N}$

Př. 7: Střela byla vystřelena rychlostí 20 m/s pod úhlem 50° s vodorovnou rovinou. Urči vodorovnou a svislou složku vektoru rychlosti.

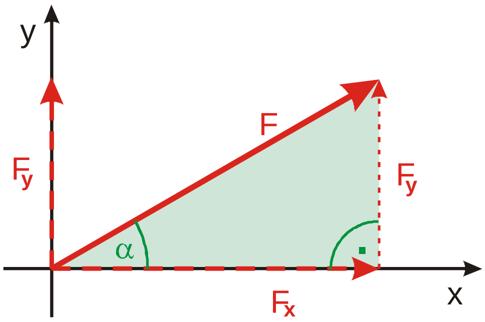
Obrázek je prakticky stejný jako v předchozím příkladě.



- $\sin\alpha = \frac{v_y}{v} \Rightarrow v_y = v\cdot\sin\alpha = 20\cdot\sin 50^\circ\ \mathrm{m/s} = 15{,}3\ \mathrm{m/s}$
- $\cos\alpha = \frac{v_x}{v} \Rightarrow v_x = v\cdot\cos\alpha = 20\cdot\cos 50^\circ\ \mathrm{m/s} = 12{,}9\ \mathrm{m/s}$

Vodorovná složka rychlosti má velikost 12,9 m/s, svislá 15,3 m/s.

Př. 8: Síla má dvě složky $F_x = 8\,\mathrm{N}$ a $F_y = 4\,\mathrm{N}$. Urči velikost síly *F* a úhel, který svírá s osou *x*.

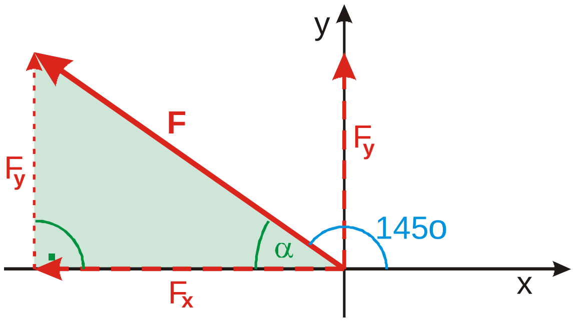


Z obrázku vidíme: $F^2 = F_x^2 + F_y^2 \Rightarrow F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = 8{,}94\,\mathrm{N}$.

Pro úhel α: $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{F_y}{F_x} \Rightarrow \alpha = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{F_y}{F_x}\right) = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{4}{8}\right) = 26{,}57°$

Př. 9: Síla o velikosti 12 N svírá s vodorovnou rovinou úhel 145°. Urči vodorovnou a svislou složku této síly.

Nakreslíme si obrázek.

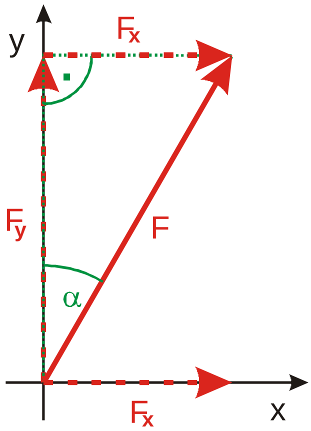


Pro úhel α platí: $\alpha = 180° - 145° = 35°$
Hledané složky vektoru tvoří odvěsny pravoúhlého trojúhelníku:

- $\sin\alpha = \frac{F_y}{F} \Rightarrow F_y = F \cdot \sin\alpha = 12 \cdot \sin 35°\,\mathrm{N} = 6{,}9\,\mathrm{N}$
- $\cos\alpha = \frac{F_x}{F} \Rightarrow F_x = F \cdot \cos\alpha = 12 \cdot \cos 35°\,\mathrm{N} \doteq 9{,}8\,\mathrm{N}$

Složka $\boldsymbol{F}_x$ směřuje na opačnou stranu než osa *x* pro platí $\boldsymbol{F}_x = -9{,}8\,\mathrm{N}$.

Př. 10: Síla o velikosti 50 N svírá s osou *y* úhel $\alpha = 35°$. Urči velikost jejích složek F_x a F_y, jestliže platí $F_x > 0$.



Z obrázku vidíme:

$$\sin\alpha = \frac{F_x}{F} \Rightarrow F_x = F \cdot \sin\alpha = 50 \cdot \sin 35° = 28{,}69\ \mathrm{N}$$

$$\cos\alpha = \frac{F_y}{F} \Rightarrow F_y = F \cdot \cos\alpha = 50 \cdot \cos 35° = 40{,}96\ \mathrm{N}$$

Shrnutí: Vektory je možné rozkládat na složky v libovolných směrech. Složky ve směru souřadných os jsou u vektorů analogií souřadnic bodu.